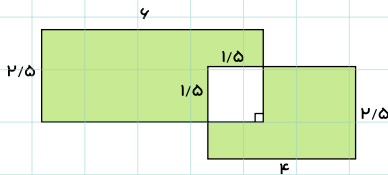


محاسبه خلاقانه

محمدتقی طاهری تنجانی

مساحت

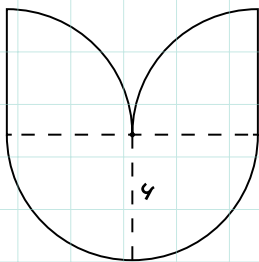
مثال ۳. در شکل زیر دو مستطیل طوری یکدیگر را قطع کرده‌اند که فضای مشترکشان مربعی به ضلع $1/5$ است. مساحت ناحیه رنگی چقدر است؟



حل: با کمی دقت مشاهده می‌کنیم از کنار هر یک از مستطیل‌ها مربعی به ضلع $1/5$ کم شده است لذا مجموع مساحت‌های دو مستطیل را به دست می‌آوریم و دو بار مساحت مربع را از آن کم می‌کنیم.

$$\text{مساحت ناحیه رنگی} = (2/5 \times 4) + (2/5 \times 4) - 2(1/5 \times 1/5) = 20/5 = 4$$

مثال ۴. شکل زیر از یک نیم‌دایره و دو ربع دایره تشکیل یافته است. مساحت آن چقدر است؟

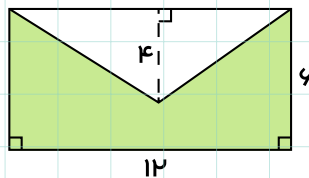


حل: دو ربع دایره بالای روی هم یک نیم‌دایره به شعاع ۳ تشکیل می‌دهند که با نیم‌دایره پایینی مجموعاً معادل یک دایره به شعاع ۳ هستند.

$$\text{مساحت شکل} = \pi(3)^2 = 9\pi$$

خلاقیت به خرج دهیم و مساحت شکل‌هایی را به دست آوریم که به طور مستقیم در آن‌ها کمی پیچیدگی وجود دارد.

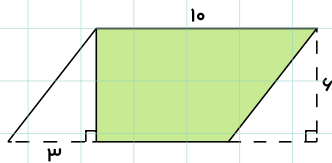
مثال ۱. مساحت ناحیه رنگی در شکل زیر چقدر است؟



حل: به جای محاسبه مستقیم ناحیه رنگی مشاهده می‌کنیم که مساحت ناحیه سایه‌خورده از حذف مساحت مثلث بالا از مساحت مستطیل به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \text{مساحت مستطیل} &= 12 \times 6 = 72 \\ \text{مساحت مثلث} &= \frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24 \\ \text{مساحت ناحیه رنگی} &= 72 - 24 = 48 \end{aligned}$$

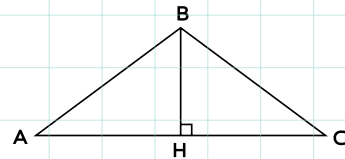
مثال ۲. مساحت ناحیه رنگی در شکل زیر چقدر است؟



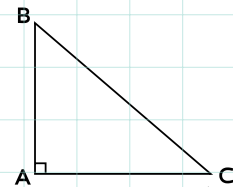
حل: ناحیه رنگی یک دوزنقه است. با کمی دقت می‌توان آن را یک مستطیل در نظر گرفت که مثلث قائم‌الزاویه‌ای از آن حذف شده است.

$$\begin{aligned} \text{مساحت مستطیل} &= 10 \times 4 = 40 \\ \text{مساحت مثلث} &= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \\ \text{مساحت ناحیه رنگی} &= 40 - 6 = 34 \end{aligned}$$

در اینجا می‌خواهیم به محاسبه مساحت برخی از شکل‌ها بپردازیم. برای حل مسئله‌ها داشتن مساحت مثلث، مستطیل و دایره تا حد زیادی کافی است. مساحت هر مثلث نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع آن است، به‌ویژه اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد مساحت آن نصف حاصل ضرب دو ضلع زاویه قائمه آن است.

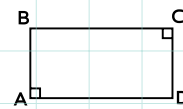


$$\text{مساحت مثلث} = S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH$$

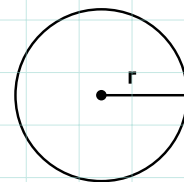


$$\text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه} = S_{BAC} = \frac{1}{2} AB \times AC$$

مساحت مستطیل از حاصل ضرب طول در عرض آن و مساحت دایره از مجذور شعاع دایره در عدد π به دست می‌آید.

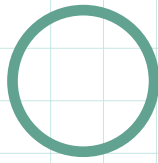


$$S_{ABCD} = AB \times AD$$

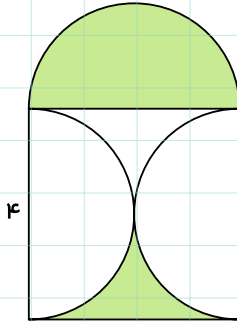


$$S_{\text{دایره}} = \pi r^2$$

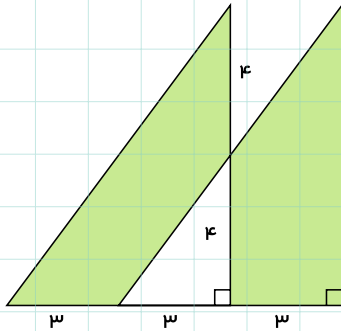
حالا با ذکر مثال‌هایی می‌خواهیم در حل مسئله‌های مربوط به محاسبه مساحت شکل‌ها



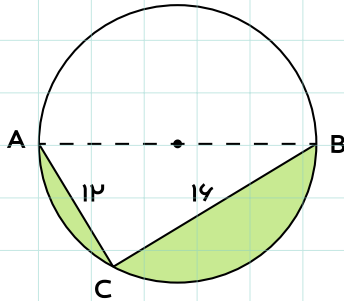
پ. (۸=پاسخ نهایی)



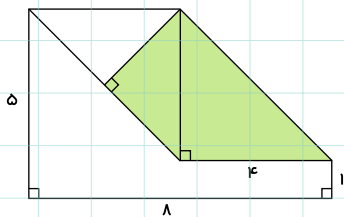
ت. (۳۶=پاسخ نهایی)



ث. (۹۶-۵۰π=پاسخ نهایی)



ج. (۱۲=پاسخ نهایی)



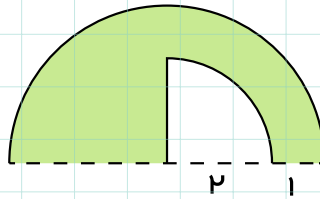
است). حالا کافی است مساحت ناحیه رنگ نشده را از مساحت مربع کم کنیم. هنر ما آن است که بتوانیم دقیقاً مساحت ناحیه رنگ نشده را به دست آوریم. با کمی دقت مساحت ناحیه رنگ نشده متشکل از دو ربع دایره به شعاع ۲ و یک مربع به ضلع ۲ است. پس:

$$\text{مساحت ناحیه سایه خورده} = 2 \times 2 + \frac{1}{4}(4\pi) = 4 + \pi$$

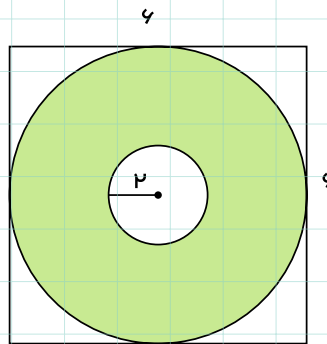
$$\text{مساحت ناحیه سایه خورده} = 16 - (4 + \pi) = 12 - \pi$$

حالا که با ترفندهای محاسبه مساحت شکل های خاص آشنا شدید، می توانید به عنوان تمرین مساحت ناحیه رنگی را در شکل های زیر به دست آورید. برای اطمینان از راه حل و جواب خود، جواب نهایی هر شکل را در کنار آن آورده ایم. می توانید از این طریق از صحت راه حل خود آگاه شوید.

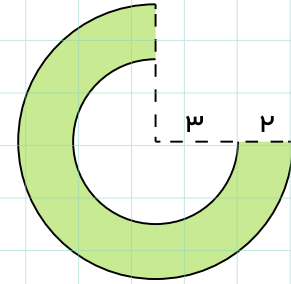
الف. (۳/۵π=پاسخ نهایی)



ب. (۵π=پاسخ نهایی)



مثال ۵. مساحت ناحیه رنگی چقدر است؟



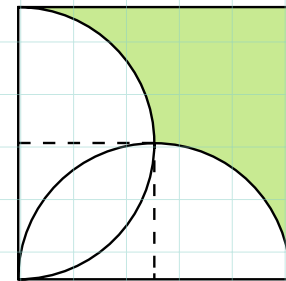
حل: ناحیه رنگی بین دو دایره محدود است که ربع آن حذف شده است. کافی است مساحت دایره بزرگتر را حساب کنیم و ربع دایره کنار آن را حذف کنیم. سپس مساحت دایره کوچکتر را با حذف ربع دایره کنار آن به دست آوریم. از تفاضل دو مقدار به دست آمده، مساحت ناحیه رنگی به دست می آید.

$$\text{مساحت دایره بزرگ} = \frac{1}{4}(25\pi) = \frac{25\pi}{4}$$

$$\text{مساحت دایره بزرگ} = \frac{1}{4}(9\pi) = \frac{9\pi}{4}$$

$$\text{مساحت ناحیه رنگی} = \frac{25\pi}{4} - \frac{9\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$$

مثال ۶. در شکل زیر چهارضلعی مربع است و نیم دایره ها به شعاع ۲ هستند. مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



حل: مساحت مربع ۱۶ است (ضلع مربع ۴)